Corso di Laurea in Informatica	**Analisi Matematica**	**codice 371272** **12 gennaio 2024**

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	b
2	c
3	d
4	d
5	a
6	c
7	d
8	d
9	a
10	a
11	d
12	a

1. La derivata della funzione $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + x \log(1+x^2)$ è

(a) 0

► (b) $2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x^2}{1+x^2} + \log(1+x^2)$

(c) $\frac{2x^3+1}{1+x^2}$

(d) $\frac{x^4+x}{1+x^2} + 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \log(1+x^2)$

Soluzione:

$$f(x) = x^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + x\log(1+x^2)$$

$$f'(x) = 2x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \cancel{x^2} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) + 1 \cdot \log(1+x^2) + x \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x =$$

$$= 2x \operatorname{artg}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{x^2+1} + \log(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2} =$$

$$= 2x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x^2}{1+x^2} + \log(1+x^2)$$

2. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\sin(x^2)} - 1}{x^2} & \text{se } x < 0 \\ (x-\alpha)^3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è continua nel punto $x = 0$

(a) per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$

(b) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

▶ (c) solo per $\alpha = -1$

(d) per $\alpha = 1$ e per $\alpha = -1$

Soluzione:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\sin(x^2)} - 1}{x^2} & \text{se } x < 0 \\ (x-\alpha)^3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$f(0) = -\alpha^3$ $\quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\alpha^3$, quindi f è continua a destra in $x=0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{\sin(x^2)} - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{x^2 + o(x^4)} - 1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\cancel{1} + x^2 + o(x^4) + o(x^2 + o(x^4)) - \cancel{1}}{x^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + o(x^4)}{x^2} = 1$$

quindi f è continua a sinistra in $x=0 \iff -\alpha^3 = 1 \iff \alpha = -1$.

Ne segue che f è continua in $x=0 \iff \alpha = -1$.

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(\log(\cos x)\right) \tan x \, dx =$

(a) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin\left(\log\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(b) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\log\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{\pi}{4}$

(c) $\cos\left(\log\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

► (d) $\sin\left(\frac{\log 2}{2}\right)$

Soluzione:

Calcoliamo prima l'integrale indefinito utilizzando due sostituzioni.

$$\int \cos(\log(\cos x))\, tg\, x \, dx = \int \cos(\log(\cos x)) \frac{\sin x}{\cos x}\, dx =$$

$\cos x = t$, $\frac{dt}{dx} = -\sin x$, $\sin x \, dx = -dt$

$$= -\int \cos(\log t) \cdot \frac{1}{t}\, dt =$$

$y = \log t$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$, $dy = \frac{dt}{t}$

$$= -\int \cos y \, dy = -\sin y + c = -\sin(\log t) + c = -\sin(\log(\cos x)) + c$$

Quindi

$$\int_0^{\pi/4} \cos(\log(\cos x))\, tg\, x \, dx = \Big[-\sin(\log(\cos x))\Big]_0^{\pi/4} =$$

$$= -\sin\left(\log\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\right) + \sin(\log(\cos 0)) =$$

$$= -\sin\left(\log\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sin(\log 1) = -\sin\left(\log\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cancel{\sin 0} =$$

$$= -\sin\left(\log\left(2^{-1/2}\right)\right) = -\sin\left(-\frac{1}{2}\log 2\right) = \sin\left(\frac{\log 2}{2}\right)$$

4. Sia $F(x) = \displaystyle\int_3^{x^5} \log(1+t)\, dt$. Allora $F''(x) =$

(a) $20x^3\log(x+1) + \frac{5x^4}{x+1}$

(b) $\log(x^5+1) - \log 4$

(c) $\frac{5x^4}{x^5+1}$

► (d) $20x^3\log(x^5+1) + \frac{25x^8}{x^5+1}$

Soluzione:

$$F(x) = \int_3^{x^5} \log(1+t)\,dt$$

$$F'(x) = \log(1+x^5)\cdot 5x^4$$

$$F''(x) = 5\left(\frac{5x^4}{1+x^5}\cdot x^4 + \log(1+x^5)\,4x^3\right) =$$

$$= \frac{25x^8}{1+x^5} + 20\,x^3\log(1+x^5).$$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(4x)}{\sqrt[3]{1+\sin(x^2)}-1}\,dx$

► (a) diverge positivamente (b) diverge negativamente (c) non esiste (d) converge

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \dfrac{\sin(4x)}{\sqrt[3]{1+\sin(x^2)} - 1}$ e osserviamo che

la funzione è continua in $(0,1]$ in quanto il denominatore non si annulla mai in tale intervallo dato che $0 < \sin(x^2)$ $\forall\, x \in (0,1]$.

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor $\sin(t) = t + o(t^2)$ con $t = 4x$ e $t = x^2$ ottenendo

$\sin(4x) = 4x + o(x^2)$, $\quad \sin(x^2) = x^2 + o(x^4)$

e quello del binomiale $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$ con $t = x^2 + o(x^4)$ e $\alpha = \frac{1}{3}$ ottenendo

$$(1+\sin(x^2))^{1/3} = (1 + x^2 + o(x^4))^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^4) + o(x^2 + o(x^4)) =$$
$$= 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

Quindi, per $x \to 0$

$$f(x) = \frac{4x + o(x^2)}{\cancel{1} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) - \cancel{1}} = \frac{x(4 + o(x))}{x^2\left(\frac{1}{3} + o(1)\right)} = \frac{4 + o(x)}{x\left(\frac{1}{3} + o(1)\right)}$$

Da questo otteniamo che $f(x) > 0$ in un intorno destro di 0 e applichiamo il criterio del confronto asintotico scegliendo $g(x) = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{4 + o(x)}{\cancel{x}\left(\frac{1}{3} + o(1)\right)} \cdot \cancel{x} = 12.$$

Dato che $\int_0^1 g(x)\,dx = +\infty$, segue che $\int_0^1 f(x)\,dx$ diverge positivamente.

6.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sin x - |x|}\, dx$$

(a) diverge positivamente (b) non esiste ► (c) converge (d) diverge negativamente

Soluzione:

Poniamo $f(x) = e^{\sin x - |x|}$. Osserviamo che $f(x) > 0$ quindi possiamo applicare il criterio del confronto.

$$0 < e^{\sin x - |x|} = e^{\sin x} \cdot e^{-|x|} \leq e^{1} e^{-|x|} = e \cdot e^{-|x|}.$$

Poniamo quindi $g(x) = e \cdot e^{-|x|}$ e osserviamo che g è pari.

$$\int_0^{+\infty} e^{-|x|} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-x} dx =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^M = \lim_{M\to+\infty} -e^{-M} + e^{0} = 1 - e^{-\infty} = 1 - 0 = 1$$

quindi $\int_0^{+\infty} e^{-|x|} dx$ converge e, per simmetria, converge anche $\int_{-\infty}^{0} e^{-|x|} dx$. Quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$ converge e, per il criterio del confronto, converge anche $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

7. $\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\left(\arctan \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n =$

(a) non esiste (b) 0 (c) 1 ► (d) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

Soluzione:

$$a_n = \left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)^n$$

Utilizzando lo sviluppo di Taylor

$\operatorname{arctg} t = t + o(t)$ con $t = \frac{1}{\sqrt{n}}$ otteniamo

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Dallo sviluppo

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ con $t = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ abbiamo

$$\cos\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^2 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Osserviamo ora che

$$a_n = e^{n \log\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)}$$

Dato che $\log(1+t) = t + o(t)$, poniamo $t = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

ottenendo

$$\log\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) = \log\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Quindi $a_n = e^{n\log\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{1}{2} + o(1)}$

Ne segue che $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

8. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^2+1)}{n^2+1} =$

(a) non esiste (b) 1 (c) $+\infty$ ▶ (d) 0

Soluzione:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^2+1)}{n^2+1} = \frac{\text{limitata}}{+\infty} = 0$$

9. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \log\left(\frac{n^2+1}{n^2}\, e^{\frac{(-1)^n}{n}}\right)$

► (a) converge (b) diverge negativamente (c) diverge positivamente (d) è indeterminata

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} \log\left(\frac{n^2+1}{n^2}\, e^{\frac{(-1)^n}{n}}\right).$$

Osserviamo che $\log\left(\frac{n^2+1}{n^2}\, e^{\frac{(-1)^n}{n}}\right) = \log\left(\frac{n^2+1}{n}\right) + \frac{(-1)^n}{n}$

Poniamo quindi $b_n = \log\left(\frac{n^2+1}{n}\right)$, $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Osserviamo che $b_n \geq 0$ $\forall\, n \geq 1$ e $b_n = \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico con $\frac{1}{n^2}$ e concludere che $\sum_n b_n$ converge.

$\sum_n c_n$ invece è a segni alterni. Dato che $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ e $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ è decrescente, per il criterio di Leibniz $\sum c_n$ converge.

Ne segue che la serie data è somma di due serie convergenti quindi converge.

10. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^2(1+\log n)}$

► (a) converge assolutamente (b) è indeterminata

(c) diverge a $+\infty$ (d) diverge a $-\infty$

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^2(1+\log n)}$$

Poniamo $a_n = \dfrac{\cos n}{n^2(1+\log n)}$ e osserviamo che (a_n) è a segno variabile.

Vediamo se la serie converge assolutamente.

$$|a_n| = \frac{|\cos n|}{n^2(1+\log n)} \leq \frac{1}{n^2(1+\log n)} \leq \frac{1}{n^2 \log n}$$

La serie $\sum_n \dfrac{1}{n^2 \log n}$ è del tipo $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ che converge perché $\alpha = 2 > 1$. Per il criterio del confronto converge quindi anche $\sum |a_n|$, quindi la serie data converge assolutamente.

11. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\log(y^2) =$

(a) 0 (b) $-\infty$ (c) 1 ► (d) non esiste

Soluzione:

Poniamo $f(x,y) = x\log(y^2)$ e osserviamo che f è definita per $y \neq 0$, quindi in $\mathbb{R}^2$ privato dell'asse x.

Consideriamo prima la curva $\gamma(t) = (0,t)$ (corrispondente all'asse y).

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} f(0,t) = \lim_{t\to 0} 0\cdot\log(t^2) = 0.$$

Consideriamo ora $\alpha(t) = (t, e^{-1/t})$ e osserviamo che

$$\lim_{t\to 0^+} \alpha(t) = (0,0)$$

Dato che $\lim\limits_{t\to 0^+} f(\alpha(t)) = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t, e^{-1/t}) = \lim\limits_{t\to 0^+} t\log\left(e^{-\frac{2}{t}}\right) =$

$= \lim\limits_{t\to 0^+} t\left(-\frac{2}{t}\right) = -2$, possiamo concludere che

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste.

12. Il sostegno della curva $\gamma(t) = (t^2, 2t^2)$, $t \in [0,1]$ è

► (a) un segmento di retta (b) un arco di parabola (c) un'ellisse (d) un arco di iperbole

Soluzione:

$\gamma(t) = (t^2, 2t^2) \qquad t \in [0,1]$.

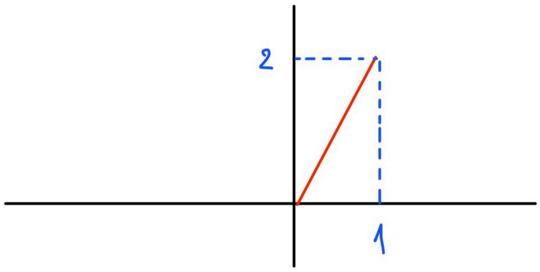
La curva in coordinate cartesiane risulta

$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t^2 \end{cases}$ ricavando t^2 dalla prima equazione e sostituendo nella seconda otteniamo

$y = 2x$ che rappresenta una retta.

Dato che $0 \leq t \leq 1$ risulta $0 \leq t^2 \leq 1$, quindi $0 \leq x \leq 1$

pertanto la curva ha per sostegno un segmento di retta



Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 21985 12 gennaio 2024

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	c
2	b
3	a
4	a
5	a
6	d
7	c
8	d
9	c
10	d
11	d
12	c

1. La derivata della funzione $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + x\log(1+x^2)$ è

(a) $\dfrac{2x^3+1}{1+x^2}$

(b) $\dfrac{x^4+x}{1+x^2} + 2x\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) + \log(1+x^2)$

► (c) $2x\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{x^2}{1+x^2} + \log(1+x^2)$

(d) 0

Soluzione:

$$f(x) = x^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + x \log(1+x^2)$$

$$f'(x) = 2x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \cancel{x^2} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) + 1 \cdot \log(1+x^2) + x \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x =$$

$$= 2x \operatorname{artg}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{x^2+1} + \log(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2} =$$

$$= 2x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x^2}{1+x^2} + \log(1+x^2)$$

2. L'insieme $\{x \in \mathbb{R} : |\sin x| < 1\}$ è:

(a) limitato inferiormente

► (b) non limitato

(c) un intervallo

(d) limitato superiormente

Soluzione:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |\sin x| < 1\}$$

Possiamo risolvere esplicitamente la disuguaglianza ottenendo

$$|\sin x| < 1 \iff -1 < \sin x < 1 \iff x \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z},$$

quindi A è l'unione di infiniti intervalli di ampiezza π

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi).$$

Ne segue che A non è limitato.

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(\log(\cos x)) \tan x \, dx =$

► (a) $\sin\left(\dfrac{\log 2}{2}\right)$

(b) $\dfrac{1}{2} \log\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin\left(\log \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(c) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\log \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \dfrac{\pi}{4}$

(d) $\cos\left(\log \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Soluzione:

Calcoliamo prima l'integrale indefinito utilizzando due sostituzioni.

$$\int \cos(\log(\cos x))\, tg\, x\, dx = \int \cos(\log(\cos x)) \frac{\sin x}{\cos x}\, dx =$$

$\cos x = t$, $\frac{dt}{dx} = -\sin x$, $\sin x\, dx = -dt$

$$= -\int \cos(\log t) \cdot \frac{1}{t}\, dt =$$

$y = \log t$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$, $dy = \frac{dt}{t}$

$$= -\int \cos y\, dy = -\sin y + c = -\sin(\log t) + c = -\sin(\log(\cos x)) + c$$

Quindi

$$\int_0^{\pi/4} \cos(\log(\cos x))\, tg\, x\, dx = \Big[-\sin(\log(\cos x))\Big]_0^{\pi/4} =$$

$$= -\sin\left(\log\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\right) + \sin(\log(\cos 0)) =$$

$$= -\sin\left(\log\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sin(\log 1) = -\sin\left(\log\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cancel{\sin 0} =$$

$$= -\sin\left(\log\left(2^{-1/2}\right)\right) = -\sin\left(-\frac{1}{2}\log 2\right) = \sin\left(\frac{\log 2}{2}\right)$$

4. Sia $F(x) = \int_1^{x^2} e^{t^2+1}\, dt$ allora

► (a) $F''(x) = 2e^{x^4+1}(1+4x^4)$

(b) $F''(x) = e^{x^4+1} - e^2$

(c) $F''(x) = \int_1^{x^2} 2te^{t^2+1}\, dt$

(d) $F''(x) = 2x \int_1^{x} e^{t^2+1}\, dt$

Soluzione:

$$F(x) = \int_1^{x^2} e^{t^2+1}\, dt$$

$$F'(x) = e^{(x^2)^2+1} \cdot 2x = 2x\, e^{x^4+1}$$

$$F''(x) = 2\left(1 \cdot e^{x^4+1} + x\, e^{x^4+1} \cdot 4x^3\right) = 2e^{x^4+1}\left(1 + 4x^4\right)$$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(4x)}{\sqrt[3]{1+\sin(x^2)}-1}\, dx$

► (a) diverge positivamente (b) diverge negativamente (c) non esiste (d) converge

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \dfrac{\sin(4x)}{\sqrt[3]{1+\sin(x^2)}-1}$ e osserviamo che la funzione è continua in $(0,1]$ in quanto il denominatore non si annulla mai in tale intervallo dato che $0 < \sin(x^2)$ $\forall\, x \in (0,1]$.

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor $\sin(t) = t + o(t^2)$ con $t = 4x$ e $t = x^2$ ottenendo

$$\sin(4x) = 4x + o(x^2), \qquad \sin(x^2) = x^2 + o(x^4)$$

e quello del binomiale $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$ con $t = x^2 + o(x^4)$ e $\alpha = \frac{1}{3}$ ottenendo

$$(1+\sin(x^2))^{1/3} = (1+x^2+o(x^4))^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^4) + o(x^2+o(x^4)) =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

Quindi, per $x \to 0$

$$f(x) = \frac{4x + o(x^2)}{\cancel{1} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) - \cancel{1}} = \frac{x(4 + o(x))}{x^2\left(\frac{1}{3} + o(1)\right)} = \frac{4 + o(x)}{x\left(\frac{1}{3} + o(1)\right)}$$

Da questo otteniamo che $f(x) > 0$ in un intorno destro di 0 e applichiamo il criterio del confronto asintotico scegliendo $g(x) = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4 + o(x)}{\cancel{x}\left(\frac{1}{3} + o(1)\right)} \cdot \cancel{x} = 12.$$

Dato che $\int_0^1 g(x)\,dx = +\infty$, segue che $\int_0^1 f(x)\,dx$ diverge positivamente.

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x+\sqrt{x}}\,dx$

(a) non esiste (b) diverge negativamente (c) diverge positivamente (d) converge

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx \quad . \quad \text{Sia } f(x)=\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x+\sqrt{x}} .$$

$f(x)>0 \ \forall x\in(0,+\infty)$ e f non è definita per $x=0$.

Osserviamo che

$$f(x)=\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} . \quad \text{Scegliamo } g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ e osserviamo}$$

che

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\cancel{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})}\cdot\cancel{\sqrt{x}}=\frac{\operatorname{arctg}(+\infty)}{1+0}=\pi/2 .$$

Dato che $\int_0^1 g(x)\,dx$ converge, dal criterio del confronto asintotico, $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.

Vediamo per $x\to+\infty$.

$$f(x)=\frac{\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x+\sqrt{x}}=\frac{1}{x}\,\frac{1+o\left(\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\frac{1}{x^2}\,\frac{1+o\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Scegliamo $g(x)=\frac{1}{x^2}$ e osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\cancel{\frac{1}{x^2}}\,\frac{1+o\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\cancel{x^2}=1 .$$

Dato che $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, dal criterio del confronto asintotico, anche $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Quindi $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n=$

(a) 0 (b) non esiste ► (c) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ (d) 1

Soluzione:

$$a_n = \left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)^n$$

Utilizzando lo sviluppo di Taylor

$\operatorname{arctg} t = t + o(t)$ con $t = \frac{1}{\sqrt{n}}$ otteniamo

$\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Dallo sviluppo

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ con $t = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ abbiamo

$$\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^2 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Osserviamo ora che

$$a_n = e^{n \log\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)}$$

Dato che $\log(1+t) = t + o(t)$, poniamo $t = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

ottenendo

$$\log\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) = \log\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Quindi $a_n = e^{n\log\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{1}{2} + o(1)}$

Ne segue che $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

8. La successione $a_n = \dfrac{3^n - 3^{n\log n}}{n^n}$, definita per $n \geq 1$,

(a) tende a $+\infty$ (b) tende a 0 (c) non ha limite ► (d) tende a $-\infty$

Soluzione:

$$\frac{3^n - 3^{n\log n}}{n^n} = \frac{3^n - e^{n\log n\log 3}}{n^n} = \frac{3^n - \left(e^{\log n}\right)^{n\log 3}}{n^n} =$$

$$= \frac{3^n - n^{n\log 3}}{n^n} = \frac{3^n}{n^n} - \frac{n^{n\log 3}}{n^n} = \frac{3^n}{n^n} - n^{n\log 3 - n} =$$

$$= \left(\frac{3}{n}\right)^n - n^{n(\log 3 - 1)} \to 0 - n^{\infty} = -\infty .$$

9. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \log\left(\frac{n^2+1}{n^2}\, e^{\frac{(-1)^n}{n}}\right)$

(a) diverge negativamente (b) è indeterminata ► (c) converge (d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} \log\left(\frac{n^2+1}{n^2}\, e^{\frac{(-1)^n}{n}}\right).$$

Osserviamo che $\log\left(\frac{n^2+1}{n^2}\, e^{\frac{(-1)^n}{n}}\right) = \log\left(\frac{n^2+1}{n}\right) + \frac{(-1)^n}{n}$

Poniamo quindi $b_n = \log\left(\frac{n^2+1}{n}\right)$, $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Osserviamo che $b_n \geq 0 \ \forall\, n \geq 1$ e $b_n = \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico con $\frac{1}{n^2}$ e concludere che $\sum_n b_n$ converge.

$\sum_n c_n$ invece è a segni alterni. Dato che $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ e $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ è decresente, per il criterio di Leibniz $\sum c_n$ converge.

Ne segue che la serie data è somma di due serie convergenti quindi converge.

10. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - \frac{1}{n}\right)$

(a) diverge positivamente (b) è indeterminata

(c) converge assolutamente ► (d) converge ma non converge assolutamente

Soluzione:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-\frac{1}{n}\right)=\cancelto{0}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\cos\left(n\pi-\frac{1}{n}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n\pi-\frac{1}{n}\right)=$$

$$=-\sin\left(n\pi-\frac{1}{n}\right)=-\left(\cancelto{0}{\sin(n\pi)}\cos\left(-\frac{1}{n}\right)+\cos(n\pi)\sin\left(-\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\cos(n\pi)\sin\frac{1}{n}=(-1)^n\sin\frac{1}{n}.$$

Ponendo $a_n=\sin\frac{1}{n}$, la serie diventa $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$.

La successione a_n è decrescente dato che è composizione della successione $\frac{1}{n}$ (decrescente) e della funzione $\sin t$ che per $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ è crescente.

Inoltre $a_n>0$ $\forall n\geq 1$ e $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

Dal criterio di Leibniz otteniamo che la serie converge.

Per la convergenza assoluta osserviamo che

$$|(-1)^n a_n|=a_n=\sin\frac{1}{n}.$$

Scegliendo $b_n=\frac{1}{n}$ abbiamo che $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$.

Dato che $\sum b_n=+\infty$, dal criterio del confronto asintotico, anche $\sum a_n=+\infty$, quindi la serie non converge assolutamente.

11. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\log(y^2)=$

(a) 0 (b) 1 (c) $-\infty$ ► (d) non esiste

Soluzione:

Poniamo $f(x,y) = x \log(y^2)$ e osserviamo che f è definita per $y \neq 0$, quindi in $\mathbb{R}^2$ privato dell'asse x.

Consideriamo prima la curva $\gamma(t) = (0,t)$ (corrispondente all'asse y).

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} f(0,t) = \lim_{t\to 0} 0 \cdot \log(t^2) = 0 .$$

Consideriamo ora $\alpha(t) = (t, e^{-1/t})$ e osserviamo che

$$\lim_{t\to 0^+} \alpha(t) = (0,0)$$

Dato che $\lim_{t\to 0^+} f(\alpha(t)) = \lim_{t\to 0^+} f(t, e^{-1/t}) = \lim_{t\to 0^+} t \log(e^{-\frac{2}{t}}) =$

$= \lim_{t\to 0^+} t\left(-\frac{2}{t}\right) = -2$, possiamo concludere che

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste.

12. La funzione $\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ nel punto (0,0)

(a) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

(b) non è continua ed ha una sola delle derivate parziali

► (c) ha una delle derivate parziali ed è continua

(d) ha entrambe le derivate parziali ma non è continua

Soluzione:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vediamo se esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h^2}{\sqrt{h^2+0}}-0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{h}{|h|}=\begin{cases}1 & \text{se } h\to 0^+\\ -1 & \text{se } h\to 0^-\end{cases}$$

quindi non esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Passiamo con $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

Vediamo ora la continuità utilizzando le coordinate polari.

$$g(\rho,\vartheta)=f(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta)=\frac{\rho^2\cos^2\vartheta}{\sqrt{\rho^2\cos^2\vartheta+\rho^2\sin^2\vartheta}}=\frac{\rho^2\cos^2\vartheta}{\rho}=\rho\cos^2\vartheta$$

quindi $0\leq|g(\rho,\vartheta)|\leq\rho$ e $\lim_{\rho\to 0}g(\rho,\vartheta)=0$ indipendentemente da ϑ.

La funzione è quindi continua in $(0,0)$ e ha una sola delle derivate parziali.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 483912 12 gennaio 2024

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	c
2	d
3	a
4	c
5	a
6	c
7	a
8	b
9	c
10	a
11	b
12	c

1. La derivata della funzione $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + x \log(1 + x^2)$ è

(a) $\frac{x^4 + x}{1 + x^2} + 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \log(1 + x^2)$

(b) 0

► (c) $2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x^2}{1 + x^2} + \log(1 + x^2)$

(d) $\frac{2x^3 + 1}{1 + x^2}$

Soluzione:

$$f(x) = x^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + x \log(1+x^2)$$

$$f'(x) = 2x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \cancel{x^2} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) + 1 \cdot \log(1+x^2) + x \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x =$$

$$= 2x \operatorname{artg}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{x^2+1} + \log(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2} =$$

$$= 2x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x^2}{1+x^2} + \log(1+x^2)$$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\sin(x^2-1)}{x^3 \log(1-x^2)} =$

(a) non esiste (b) 1 (c) $-\infty$ ► (d) 0

Soluzione:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\sin(x^2-1)}{x^3 \log(1-x^2)} = \frac{\sin(0)}{1 \cdot \log(0^+)} = \frac{0}{1 \cdot (-\infty)} = 0 .$$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(\log(\cos x)) \tan x \, dx =$

► (a) $\sin\left(\frac{\log 2}{2}\right)$

(b) $\frac{1}{2} \log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin\left(\log \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(c) $\cos\left(\log \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(d) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\log \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{\pi}{4}$

Soluzione:

Calcoliamo prima l'integrale indefinito utilizzando due sostituzioni.

$$\int \cos(\log(\cos x))\, tg\, x\, dx = \int \cos(\log(\cos x))\, \frac{\sin x}{\cos x}\, dx =$$

$\cos x = t$, $\frac{dt}{dx} = -\sin x$, $\sin x\, dx = -dt$

$$= -\int \cos(\log t) \cdot \frac{1}{t}\, dt =$$

$y = \log t$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$, $dy = \frac{dt}{t}$

$$= -\int \cos y\, dy = -\sin y + c = -\sin(\log t) + c = -\sin(\log(\cos x)) + c$$

Quindi

$$\int_0^{\pi/4} \cos(\log(\cos x))\, tg\, x\, dx = \Big[-\sin(\log(\cos x))\Big]_0^{\pi/4} =$$

$$= -\sin\left(\log\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\right) + \sin(\log(\cos 0)) =$$

$$= -\sin\left(\log\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sin(\log 1) = -\sin\left(\log\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cancel{\sin 0} =$$

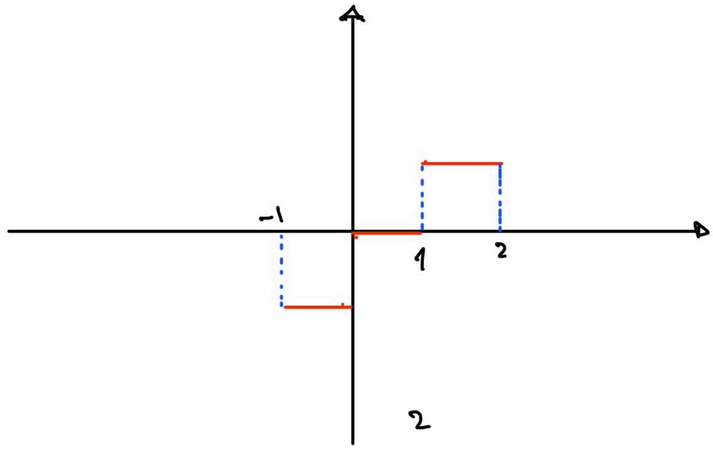
$$= -\sin\left(\log\left(2^{-1/2}\right)\right) = -\sin\left(-\frac{1}{2}\log 2\right) = \sin\left(\frac{\log 2}{2}\right)$$

4. Indicando con [x] la parte intera di x, risulta $\displaystyle\int_{-1}^{2} [x]\, dx =$

(a) non è integrabile (b) -1 ► (c) 0 (d) 1

Soluzione:

Tracciamo il grafico di $f(x) = [x]$ nell'intervallo $[-1,2]$



Dal grafico è evidente che $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 0$.

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(4x)}{\sqrt[3]{1+\sin(x^2)}-1}\,dx$

► (a) diverge positivamente (b) diverge negativamente (c) non esiste (d) converge

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \dfrac{\sin(4x)}{\sqrt[3]{1+\sin(x^2)}-1}$ e osserviamo che

la funzione è continua in $(0,1]$ in quanto il denominatore

non si annulla mai in tale intervallo dato che $0 < \sin(x^2)$

$\forall\, x \in (0,1]$.

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor $\sin(t) = t + o(t^2)$ con $t = 4x$

e $t = x^2$ ottenendo

$\sin(4x) = 4x + o(x^2)$, $\quad \sin(x^2) = x^2 + o(x^4)$

e quello del binomiale $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$ con $t = x^2 + o(x^4)$

e $\alpha = \frac{1}{3}$ ottenendo

$$(1+\sin(x^2))^{1/3} = (1+x^2+o(x^4))^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^4) + o(x^2+o(x^4)) =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

Quindi, per $x \to 0$

$$f(x) = \frac{4x + o(x^2)}{\cancel{1} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) - \cancel{1}} = \frac{x(4+o(x))}{x^2\left(\frac{1}{3}+o(1)\right)} = \frac{4+o(x)}{x\left(\frac{1}{3}+o(1)\right)}$$

Da questo otteniamo che $f(x) > 0$ in un intorno destro di 0

e applichiamo il criterio del confronto asintotico

scegliendo $g(x) = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4+o(x)}{\cancel{x}\left(\frac{1}{3}+o(1)\right)} \cdot \cancel{x} = 12.$$

Dato che $\int_0^1 g(x)\,dx = +\infty$, segue che $\int_0^1 f(x)\,dx$ diverge

positivamente.

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x(1+x^2)}\,dx$

(a) non esiste (b) diverge positivamente (c) diverge negativamente (d) converge

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x(1+x^2)}\,dx$$ Poniamo $f(x)=\frac{x-1}{x(1+x^2)}$ e osserviamo che f non è limitata intorno a $x=0$.

Dividiamo l'intervallo di integrazione in $(0,1]\cup[1,+\infty)$.

Osserviamo che $f(x)\le 0$ se $x\in(0,1]$.

Scegliamo $g(x)=\frac{1}{x}$ e osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{\cancel{x}(1+x^2)}\cdot\cancel{x}=\frac{-1}{1}=-1$$

Dato che $\int_0^1 g(x)\,dx=+\infty$, dal criterio del confronto asintotico otteniamo che $\int_0^1 f(x)\,dx=-\infty$.

Osserviamo ora che $f(x)\ge 0$ $\forall\, x\in[1,+\infty)$.

In questo intervallo scegliamo $g(x)=\frac{1}{x^2}$. Risulta che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x(1+x^2)}\cdot x^2=1$$

Dato che $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico, anche $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx=-\infty$.

7. $\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n=$

► (a) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ (b) non esiste (c) 1 (d) 0

Soluzione:

$$a_n = \left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)^n$$

Utilizzando lo sviluppo di Taylor

$\operatorname{arctg} t = t + o(t)$ con $t = \frac{1}{\sqrt{n}}$ otteniamo

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Dallo sviluppo

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ con $t = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ abbiamo

$$\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^2 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Osserviamo ora che

$$a_n = e^{n \log\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)}$$

Dato che $\log(1+t) = t + o(t)$, poniamo $t = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

ottenendo

$$\log\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) = \log\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Quindi $a_n = e^{n\log\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{1}{2} + o(1)}$

Ne segue che $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

8. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{(n^2)} =$

(a) e^2 ► (b) 0 (c) $+\infty$ (d) $\frac{1}{e^2}$

Soluzione:

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{(n^2)} = e^{n^2 \log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)} = e^{n^2 \log\left(1-\frac{1}{n+2}\right)}$$

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor del logaritmo:

$\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0$ con $t = \frac{-1}{n+2}$, $n \to +\infty$.

$$\log\left(1-\frac{1}{n+2}\right) = -\frac{1}{n+2} + o\left(\frac{1}{n+2}\right)$$

$$a_n = e^{n^2\left(-\frac{1}{n+2} + o\left(\frac{1}{n+2}\right)\right)} = e^{\frac{-n^2}{n+2}(1+o(1))} \to e^{-\infty(1+0)} = e^{-\infty} = 0$$

quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

9. La serie $\sum_{n\geq 1} \log\left(\frac{n^2+1}{n^2} e^{\frac{(-1)^n}{n}}\right)$

(a) diverge negativamente (b) è indeterminata ► (c) converge (d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} \log\left(\frac{n^2+1}{n^2} e^{\frac{(-1)^n}{n}}\right).$$

Osserviamo che $\log\left(\frac{n^2+1}{n^2} e^{\frac{(-1)^n}{n}}\right) = \log\left(\frac{n^2+1}{n}\right) + \frac{(-1)^n}{n}$

Poniamo quindi $b_n = \log\left(\frac{n^2+1}{n}\right)$, $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Osserviamo che $b_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$ e $b_n = \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico con $\frac{1}{n^2}$ e concludere che $\sum_n b_n$ converge.

$\sum_n c_n$ invece è a segni alterni. Dato che $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ e $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ è decrescente, per il criterio di Leibniz $\sum c_n$ converge.

Ne segue che la serie data è somma di due serie convergenti quindi converge.

10. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}$

► (a) converge (b) è indeterminata (c) diverge negativamente (d) diverge positivamente

Soluzione:

Sia $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{n} = \dfrac{\left(n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)^{1/2}-n}{n} = \dfrac{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}-n}{n} =$

$= \dfrac{n\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-n}{n} = \dfrac{\cancel{n}+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\cancel{-n}}{n} = \dfrac{\frac{1}{2n}(1+o(1))}{n} = \dfrac{1}{2n^2}(1+o(1))$.

Ponendo $b_n = \frac{1}{n^2}$ otteniamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$, quindi, per il criterio del confronto asintotico, $\sum a_n$ converge poiché anche $\sum b_n$ converge.

11. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\log(y^2) =$

(a) 1 ► (b) non esiste (c) $-\infty$ (d) 0

Soluzione:

Poniamo $f(x,y) = x\log(y^2)$ e osserviamo che f è definita per $y \neq 0$, quindi in $\mathbb{R}^2$ privato dell'asse x.

Consideriamo prima la curva $\gamma(t) = (0,t)$ (corrispondente all'asse y).

$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} f(0,t) = \lim_{t\to 0} 0\cdot\log(t^2) = 0$.

Consideriamo ora $\alpha(t) = (t, e^{-1/t})$ e osserviamo che

$\lim_{t\to 0^+} \alpha(t) = (0,0)$

Dato che $\lim_{t\to 0^+} f(\alpha(t)) = \lim_{t\to 0^+} f(t, e^{-1/t}) = \lim_{t\to 0^+} t\log\left(e^{-\frac{2}{t}}\right) =$

$= \lim_{t\to 0^+} t\left(-\frac{2}{t}\right) = -2$, possiamo concludere che

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste.

12. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(y-x^3)+3}{y-x^3} =$

(a) non esiste (b) 0 ► (c) $-\infty$ (d) $+\infty$

Soluzione:

$$f(x,y) = \frac{\log(y-x^3)+3}{y-x^3}.$$

Osserviamo che f è definita se $y-x^3>0$, quindi sul dominio

$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ y > x^3\}$.

Dovremo quindi considerare che $(x,y)\to(0,0)$ ma $(x,y)\in\Omega$.

Allora avremo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(y-x^3)+3}{y-x^3} = \frac{\log(0)+3}{0^+} = \frac{-\infty+3}{0^+} = (-\infty)\cdot\left(\frac{1}{0^+}\right) =$$

$$= (-\infty)(+\infty) = -\infty.$$